

Inspiring Science Education: Eratostenov eksperiment

EDITA EVETIĆ¹ I NATAŠA VINKOVIĆ²

Eratosten, slavni aleksandrijski knjižničar, napisao je brojne radove iz područja geografije, astronomije, matematike, filozofije... U helenističko doba kada je živio proćuo se kao vrsni matematićar, geograf, putopisac i astronom. Naime, dao je veliki doprinos matematici iskoristivši tzv. postupak prosijavanja prirodnih brojeva kako bi u skupu ostali samo oni prosti. Eratosten je ostavio velik trag ponajviše na području geografije jer se prvi upustio u mjerenje udaljenosti Zemlje od Sunca, Zemlje od Mjeseca...

Međutim, ono što najviše oduševljava današnje znanstvenike njegov je eksperiment mjerenja opsega Zemlje po meridijanu. Eratosten je još u 3. st. pr. Kr., temeljem slučajnog opažanja duljine Sunčeve sjene u Aleksandriji i Sieni (današnjem Asuanu), izmjerio opseg Zemlje iznenađujuće toćno. Primijetio je da u Sieni, gradu u južnom Egiptu koji se nalazi približno na sjevernoj obratnici ($24^{\circ}05'$ s. g. š.), za vrijeme ljetnog solsticija u bunarima u podne nije bilo sjene. To je znaćilo da Sunce u Sieni kulminira u zenitu, toćki koja se iznad toćke motrišta nalazi pod pravim kutom. Godinu dana poslije, za vrijeme ljetnog solsticija, u podne je izračunao kut upada Sunćevih zraka u Aleksandriji za koju je pretpostavljao da se nalazi na istom meridijanu kao i Siena. Za mjerenje kuta upada Sunćevih zraka koristio je antićki instrument *gnomon*. Razlika kuta upada Sunćevih zraka između ta dva grada iznosila je 7.2° , što odgovara 50-om dijelu kruga. Ispravno je postavio matematićki odnos: dio opsega kruga prema opsegu kruga u stupnjevima jednak je dijelu opsega kruga prema opsegu kruga u jedinici za duljinu (vrijednost u stadijima). Dobio je rezultat za meridijanski opseg Zemlje od 250 000 stadija. Stadij (grć. stadion) starogrćka je mjera za dućzinu. U razdoblju helenizma u uporabi je bilo nekoliko stadija. U staroj Grćkoj koristio se atićki stadij koji je iznosio 185 metara (dućzina trkališta na stadionu), a u Egiptu egipatski stadij koji je iznosio 157.5 metara. Toćnost njegova rezultata teško je utvrditi budući da se ne moće sa sigurnošću reći koju je vrijednost za stadij Eratosten upotrebljavao. Ako

¹Predavanje održano na 7. kongresu nastavnika matematike RH, 2016. godine u Zagrebu

²Edita Evetić, Gimnazija Vukovar

³Nataša Vinković, Gimnazija Vukovar

uzmemo vrijednost egipatskog stadija (157.5 metara), dolazimo do vrijednosti od 39 400 km za opseg Zemlje, što je iznenađujuće točno (suvremena mjerenja kažu da je opseg Zemlje po meridijanu 40 008 km).

Eratostenov eksperiment prvi je put proveden u Gimnaziji Vukovar u rujnu 2015. godine. Drugi put proveden je u ožujku 2016. u sklopu Inspiring Science Education (ISE) projekta. ISE projekt financira Europska unija, a sufinancira se iz programa potpore politike za konkurentnost i inovacije u informacijskoj i komunikacijskoj tehnologiji. Hrvatska akademska i istraživačka mreža – CARNet koordinira aktivnosti vezane uz ISE projekt u Hrvatskoj.

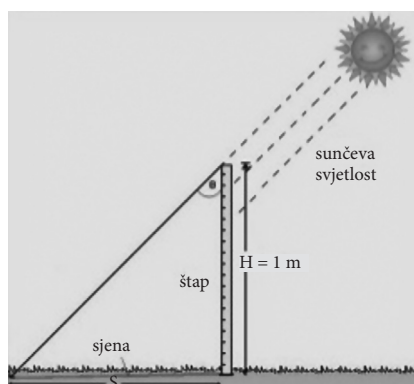
Na globalnoj razini Eratostenov eksperiment provodi se na prvi dan proljeća i na prvi dan jeseni jer tada Sunčeve zrake padaju na Ekvator pod pravim kutom. Važno je napomenuti da je Eratostenov eksperiment moguće provesti bilo kada, neovisno o ISE projektu. Tada se eksperiment provodi sa zamišljenom školom na Ekvatoru (umjesto s partnerskom školom) te su moguća mala odstupanja u mjerenju. Za provedbu Eratostenovog eksperimenta potreban je jedan štap, metar i Sunčeva sjena.

U Gimnaziji Vukovar eksperiment smo proveli 17. i 18. ožujka 2016. (zbog prosljetnih praznika) te 21. ožujka 2016., kako je bilo i planirano na globalnoj razini. U provođenju eksperimenta sudjelovalo je desetak učenika. Kako bi se postigao što točniji rezultat, partnerske škole trebaju biti na približno istom meridijanu i udaljene najmanje 200 km. Jedino su škole u Hrvatskoj eksperiment mogle provesti 17. ili 18. ožujka. Rezultati koje smo dobili provodeći eksperiment s partnerskim školama u Hrvatskoj nisu bili relevantni zbog položaja škola pa smo u te dane eksperiment proveli i sa zamišljenom školom na Ekvatoru. Budući da Sunčeve zrake 17. i 18. ožujka ne padaju okomito na Ekvator, simulacija na poveznici <http://astro.unl.edu/classaction/animations/coordsmotion/sunrays.html> dala nam je longitudu mjesta na kojem Sunčeve zrake padaju okomito na Ekvator u te dane. Naše lokalno podne (11:43:58) odredili smo pomoću web-based aplikacije Solar Calculator. Rezultat dobiven 18. ožujka točno u vrijeme našeg lokalnog podneva sa štapom zabodenim u zemlju: duljina sjene štapa 103.7 cm, kut upada Sunčevih zraka 46.0406°, opseg Zemlje po meridijanu 41 121.1 km. Najbolji rezultat dobili smo 17. ožujka u 11:58 sa sljedećim podacima: duljina sjene štapa 108.5 cm, kut upada Sunčevih zraka 47.3345°, opseg Zemlje po meridijanu 40 141.5 km.

Opseg Zemlje po meridijanu izračunali smo pomoću sljedeće proporcije:

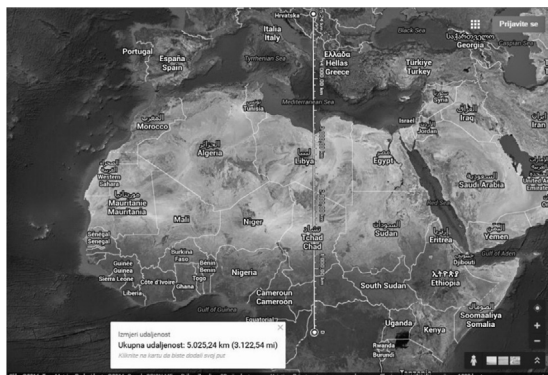
$$\frac{\text{udaljenost između škola}}{\text{kutna udaljenost među školama}} = \frac{\text{opseg Zemlje}}{360^\circ}$$

Kut upada Sunčevih zraka učenici su izračunali pomoću trigonometrije pravokutnog trokuta. Na temelju Slike 1. zaključili su da vrijedi: $\operatorname{tg} \phi = \frac{S}{H}$, gdje je S duljina sjene štapa, a H duljina štapa.



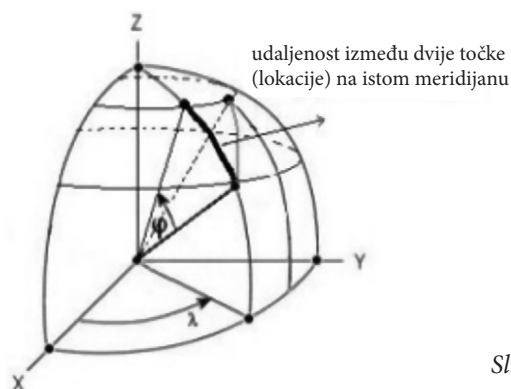
Slika 1.

Udaljenost između škola izračunali smo pomoću Google Maps. (Slika 2.)



Slika 2.

Kutna udaljenost je udaljenost između dviju točaka mjerena pomoću kuta između dviju zraka koje iz zajedničke točke (vrha kuta) prolaze kroz te točke. Kutna udaljenost među školama predstavlja razliku upadnih kutova Sunčevih zraka dviju škola. (Slika 3.)



Slika 3.

Sunčeva sjena je 21. ožujka bila slabo vidljiva jer je vrijeme bilo oblačno, što je utjecalo na preciznost očitavanja njezine duljine. Najbolji rezultat dobili smo s partner-skom školom u Grčkoj, 6th Junior High School of Corfu: opseg Zemlje 41 126 km. Naš najbolji rezultat mjerenja evidentirali smo na adresi

<http://eratosthenes.ea.gr/en/content/submit-your-data>.

Nakon proljetnog odmora učenika, Eratostenov eksperiment proveli smo i uz primjenu ISE scenarija istraživačkog učenja. Radi se o pripremama za nastavu u digitalnom obliku čiji sadržaj nastavnik može mijenjati, a u kojima su integrirani i multimedijalni sadržaji. Kako bi nam scenariji učenja postali dostupni, bilo je potrebno registrirati se na web stranici <http://portal.opendiscoveryspace.eu/ise> te pristupiti podzajednici Eratostenov eksperiment Hrvatska. Odabrani scenarij učenja „klonirali” smo i snimili kako bi ostao sačuvan u nastavničkom profilu. Scenariji istraživačkog učenja sastoje se od dva tipa prikaza: nastavničko sučelje i učeničko sučelje. U nastavničkom sučelju nalaze se tekstualni i digitalni sadržaji, pitanja za procjenu znanja učenika te smjernice za izvođenje nastave. U učeničkom sučelju nalaze se tekstualni i digitalni sadržaji i pitanja za procjenu znanja. Smjernice za izvođenje nastave i odgovori na pitanja za procjenu znanja vidljivi su samo u nastavničkom sučelju. Nastavnik može putem svog profila vidjeti odgovore koje su učenici unosili putem svoga sučelja. Scenariji istraživačkog učenja mogu se „klonirati”, odnosno duplicirati te im je moguće mijenjati sadržaj kako bi se prilagodili za upotrebu u različitim razredima. Scenariji su podijeljeni na pet aktivnosti: usmjeravanje i postavljanje pitanja, postavljanje hipoteza i dizajn, planiranje i istraživanje, analiza i interpretacija, zaključak i procjena.

U prvoj aktivnosti učenike se potiče na razmišljanje o tome koliko je velika Zemlja u usporedbi s nama. Postavljaju im se poticajna pitanja te ih se usmjerava prema glavnoj ideji: opseg Zemlje možemo izračunati ako znamo kut između dvije lokacije na Zemlji i luk koji odgovara tome kutu.

Primjeri pitanja:

- Što mislite koliko je automobila potrebno da okruži Zemlju preko Ekvatora ako uzmemo da je duljina automobila 4 metra?
- Ako dvije lokacije na istoj hemisferi dijele istu geografsku dužinu, koja od ponuđenih pretpostavki najtočnije prikazuje najveću moguću udaljenost na kojoj mogu biti?

U drugoj aktivnosti učenicima se postavlja pitanje imaju li ideju o tome kako izmjeriti opseg Zemlje. Motivira ih se gledanjem videa u trajanju od nekoliko minuta, https://www.ted.com/talks/how_simple_ideas_lead_to_scientific_discoveries, koji prikazuje kako je Eratosten izmjerio opseg Zemlje u 3. st. pr. Kr. Pomoću dva različita modela Zemlje, geografske karte i globusa, učenici se podsjećaju kako Sunčeve zrake dolaze paralelno u različita mjesta na Zemlji.

Primjeri pitanja:

- Eratosten je primijetio da se u Sieni sunce reflektira na površini dubokog izvora. Kako je to moguće?
- Dva slična objekta koja su postavljena na ravnu plohu projicirat će sličnu sjenu za izvor svjetlosti točno iznad njih. Što bi se moglo dogoditi ako bi umjesto na ravnu plohu bili postavljeni na kuglu?

U trećoj aktivnosti razmatramo najvažnije faktore našeg istraživanja:

- za vrijeme eksperimenta moramo imati na umu lokalno vrijeme partnerske škole i provesti eksperiment u trenutku kada je Sunce na identičnoj poziciji za obje škole
- za udaljenost između dviju škola morat ćemo izmjeriti udaljenost škola na istome meridijanu
- kako bismo dobili najbolje rezultate, štap bismo trebali zabiti u zemlju
- za sjenu štapa moramo odabrati najmanju vrijednost jer je tada Sunce u zenitu

Nakon toga učenici ispituju rezultate mjerenja. Duljine sjena dobivenih u pet mjerenja te udaljenost među školama upisuju u tablicu.

Primjeri pitanja:

- Što se događa sa sjenom predmeta tijekom dana?
- Eksperiment se provodi 21. 3. za vrijeme proljetnog ekvinocija. Ako škola provede eksperiment 21. 6. za vrijeme ljetnog solsticija, koja je najznačajnija razlika između ta dva eksperimenta?

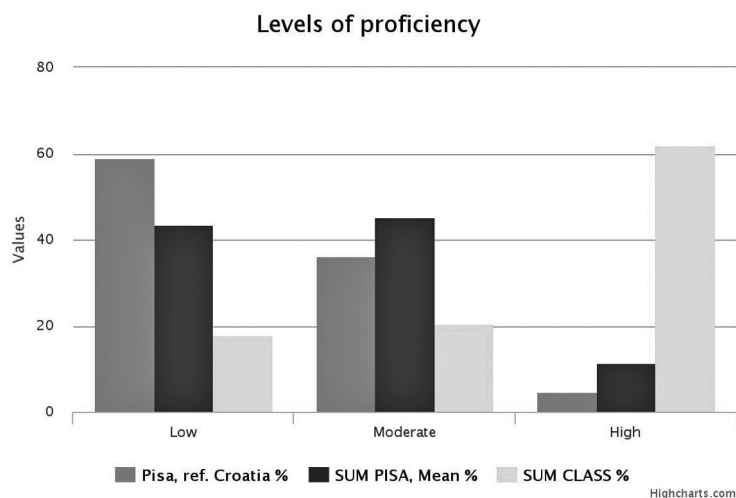
U četvrtoj aktivnosti učenici računaju kut između Sunčevih zraka i štapa (dobiveni kut jednak je kutnoj udaljenosti između lokacije na kojoj je eksperiment proveden i Ekvatora), udaljenost između lokacije na kojoj je eksperiment proveden i Ekvatora te opseg Zemlje. Zatim učenici pomoću kuta između Sunčevih zraka i štapa te kuta koji je dobila partnerska škola računaju kutnu udaljenost među školama (razlika dvaju kutova), udaljenost između dviju škola te opseg Zemlje.

Primjeri pitanja:

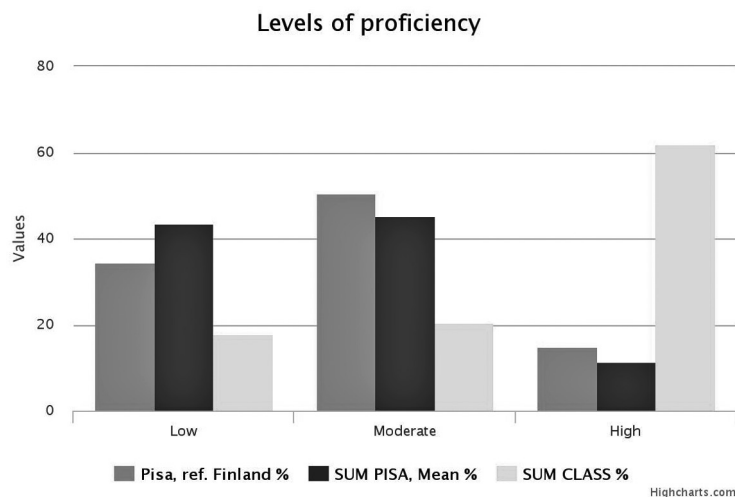
- Zašto je bolje imati dvije lokacije na većoj međusobnoj udaljenosti?
- Dvije škole na različitim geografskim dužinama pružaju podatke koje su izmjerili istoga dana točno u podne. Kako su njihovi eksperimentalni podatci povezani sa opsegom Zemlje?

U posljednjoj aktivnosti učenici procjenjuju rezultate mjerenja te izvode zaključke o potencijalnim izvorima pogrešaka.

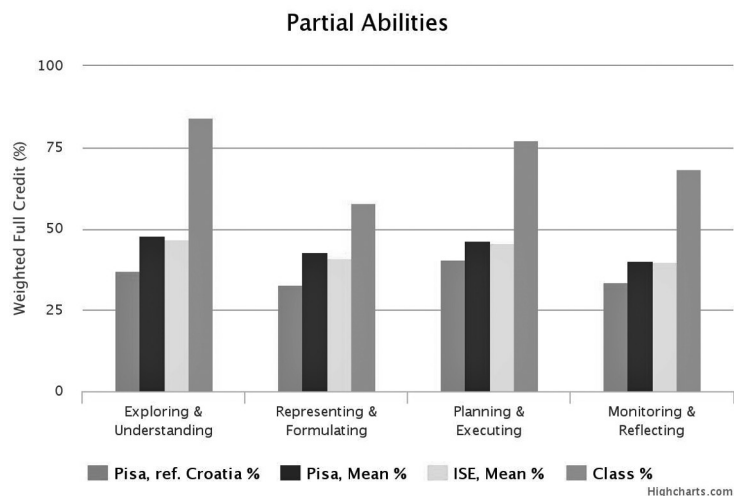
U lekciji provedenoj pomoću ISE scenarija istraživačkog učenja sudjelovalo je 30 učenika na oko 25 računala. Učenici su bili motivirani i zainteresirano su sudjelovali u svim aktivnostima. Aktivni su bili svi učenici, čak i oni kojima prirodni predmeti i matematika nisu područje interesa. Statistika rezultata vidljiva je u nastavničkom sučelju nakon provedene lekcije. Neki od rezultata prikazani su na slikama 4. – 8.



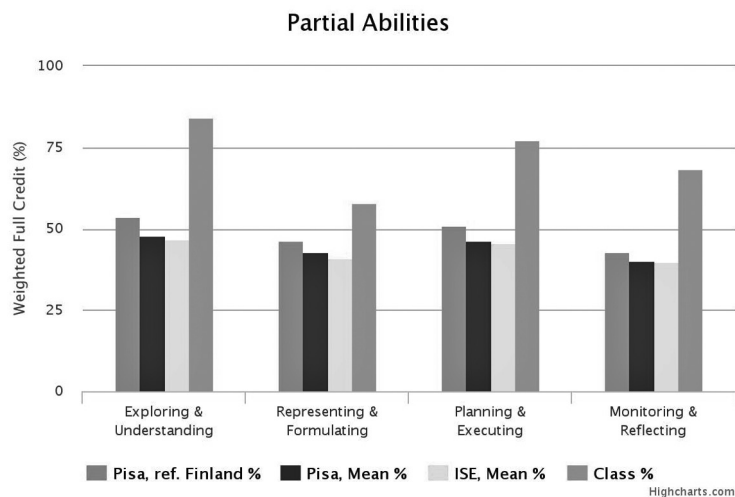
Slika 4. Rezultati pitanja o rješavanju problema – usporedbe razine stručnosti (niska, srednja, visoka): Pisa istraživanje u Hrvatskoj, Pisa istraživanje općenito, razred



Slika 5. Rezultati pitanja o rješavanju problema – usporedbe razine stručnosti (niska, srednja, visoka): Pisa istraživanje u Finskoj, Pisa istraživanje općenito, razred



*Slika 6. Rezultati pitanja o rješavanju problema – usporedbe sposobnosti
(istraživanje i razumijevanje, prikazivanje i formuliranje, planiranje i izvršavanje,
nadgledanje i odražavanje): Pisa istraživanje u Hrvatskoj,
Pisa istraživanje općenito, ISE projekt, razred*



*Slika 7. Rezultati pitanja o rješavanju problema – usporedbe sposobnosti
(istraživanje i razumijevanje, prikazivanje i formuliranje, planiranje i izvršavanje,
nadgledanje i odražavanje): Pisa istraživanje u Finskoj,
Pisa istraživanje općenito, ISE projekt, razred*



Slika 8. Rezultati pitanja o predmetnom području (3 pitanja za procjenu) 72 % uspješnosti, 7 % neuspješnosti, 21 % nije odgovoreno

Na kraju smo se priključili i foto natjecanju u kojemu će organizatori one najkreativnije i najsretnije nagraditi sudjelovanjem u ISE ljetnoj školi u Grčkoj. Na slici 9 prikazana je fotografija kojom smo konkurirali za nagradu.



Slika 9. Fotografija za foto natjecanje ISE projekta

Eratosten je sa sigurnošću napravio pravu revoluciju u znanosti svoga vremena. Svojim eksperimentom izračunao je tada veliku nepoznanicu – meridijanski opseg Zemlje. Svojim velikim umom i promišljanjem postao je uzor mnogim znanstvenicima – kako u svoje vrijeme, tako i danas. Dokazao nam je kako je moguće s puno truda, snalažljivosti, znatiželje, znanja i malo pribora otkriti nešto nepoznato, doći do željenog cilja.

Dopustimo da nam znatiželja i obrazovanje pokažu pravi put, kao Eratostenu!